ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020
<u>ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ</u>:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 111

Α2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεώρημα σελίδα 74 σχολικού βιβλίου
Α4. **(α)** Ψ
(β) Για παράδειγμα για την συνάρτηση $f(x)=x$ ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ενώ το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει (σελίδα 61 σχολικού βιβλίου)

Α5.

α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{3x-9+10}{x-3}=\dfrac{3(x-3)+10}{x-3}=3+\dfrac{10}{x-3}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε

$$3+\frac{10}{x_1-3}=3+\frac{10}{x_2-3}\Leftrightarrow\frac{10}{x_1-3}=\frac{10}{x_2-3}\Leftrightarrow 10x_2-30=10x_1-30\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται

Β2. Για $x\neq 3$

$$f(x)=y\Leftrightarrow 3+\frac{10}{x-3}=y\Leftrightarrow\frac{10}{x-3}=y-3\overset{y\neq 3}{\Leftrightarrow}\frac{x-3}{10}=\frac{1}{y-3}\Leftrightarrow x-3=\frac{10}{y-3}\Leftrightarrow x=3+\frac{10}{y-3}$$

άρα $f^{-1}(x)=3+\dfrac{10}{x-3},x\neq 3$

Άρα $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 3$

Β3 $A_{f\circ f}=\{x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_f\}$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(f^{-1}(x))=x,x\neq 3$$

Β4. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}f(x)=0$ και

$$\left|f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq|f(x)|$$

Επομένως $-|f(x)|\leq f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\leq|f(x)|$

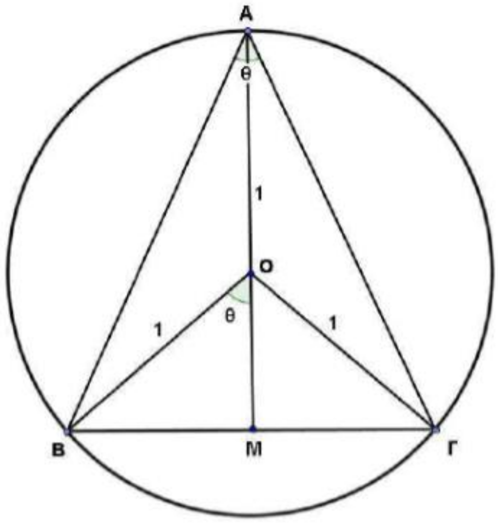
Για τιμές του x κοντά στο $-\dfrac{1}{3}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)|=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|)=0$ επομένως

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΒΓ άρα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτή.

Άρα $ΒΟΓ = 2θ$ και επειδή $ΒΟΜ = θ$ άρα και $ΜΟΓ = θ$,δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΜ η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής άρα η ΟΜ είναι διάμεσος και ύψος .



Επομένως στο τρίγωνο ΟΜΒ το οποίο είναι ορθογώνιο ισχύει $ημθ = \frac{ΒΜ}{ΟΒ} \Leftrightarrow ΒΜ = ημθ$

Άρα $ΒΓ = 2 \cdot ΒΜ = 2ημθ$

$συνθ = \frac{ΟΜ}{ΟΒ} \Leftrightarrow ΟΜ = συνθ$

$Ε = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΜ = \frac{1}{2} 2ημθ(1 + συνθ)$ επομένως

$Ε(θ) = ημθ(1 + συνθ)$

Αποδείξαμε τον τύπο για οξεία γωνία. Ομοίως αποδυκνύεται ο ίδιος τύπος και όταν η γωνία είναι αμβλεία

Γ2. Η συνάρτηση $Ε(θ) = ημθ(1 + συνθ)$ με $θ \in (0, π)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$Ε'(θ) = συνθ(1 + συνθ) + ημθ(-ημθ) = συνθ + συν^2θ - ημ^2θ$$

$$= συνθ + συν^2θ - (1 - συν^2θ) = 2συν^2θ + συνθ - 1$$

$Ε'(θ) = 0 \Leftrightarrow συνθ = -1$ ή $συνθ = \frac{1}{2}$ και επειδή $θ \in (0, π)$ δεκτή μόνο η $συνθ = \frac{1}{2}$ από την οποία προκύπτει $θ = \frac{π}{3}$

Η $Ε'$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, π)$ και μηδενίζεται όταν $θ = \frac{π}{3}$ άρα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{π}{3}\right), \left(\frac{π}{3}, π\right)$

Διάστημα	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$
Επιλεγμένος θ_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta_0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
Πρόσημο της $E'(\theta)$	+	-

Εφόσον βρήκαμε το πρόσημο της E' έχουμε βρει και τα διαστήματα μονοτονίας της E

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{3}$	$+\infty$
$E'(\theta)$	+	0	-
$E(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x=\frac{\pi}{3}$

Γ3. Στο διάστημα $A_1=\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ η $E(\theta)$ συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$E(A_1)=\left(\lim_{\theta\to 0^+}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Ο αριθμός $\frac{3}{4}\in E(A_1)$ άρα υπάρχει $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$, το θ_1 μοναδικό διότι η $E(\theta)$ γνησίως αύξουσα στο A_1

Στο διάστημα $A_2=\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$ η $E(\theta)$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$E(A_2)=\left(\lim_{\theta\to \pi^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Ο αριθμός $\frac{3}{4}\in E(A_2)$ άρα υπάρχει $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ ώστε $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$, το θ_2 μοναδικό διότι η $E(\theta)$ γνησίως φθίνουσα στο A_2

Άρα υπάρχουν μόνο δύο $\theta_1,\theta_2\in(0,\pi)$ με $\theta_1<\theta_2$ ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$ και $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$

Γ4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση $\mathrm{E}(\theta)$ στα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_{1,} \xi_2$ που ανήκουν στα $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ αντίστοιχα έτσι ώστε :

$$\mathrm{E}'(\xi_1) = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \quad (1) \quad \text{και} \qquad \mathrm{E}'(\xi_2) = \frac{\mathrm{E}(\theta_2) - \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \quad (2)$$

$$(1): \ \mathrm{E}'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_1)$$

$$(2): \ \mathrm{E}'(\xi_2)\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{E}(\theta_2) - \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα :

$$\mathrm{E}'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_1) = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_2) = -\mathrm{E}'(\xi_2)\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{E}'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$

και $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

και έχει προφανή ρίζα την $x=1$ η οποία είναι μοναδική εφόσον f' γνησίως αύξουσα.

Το πρόσημο της f' είναι :

$f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>1$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} 0<x<1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα για $x=1$ η f έχει ελάχιστο το $f(1)=-\ln\lambda$

Δ2. Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$$

Για να είναι η f μη αρνητική εφόσον παρουσιάζει ελάχιστο θα πρέπει η ελάχιστη τιμή της να είναι μη αρνητική δηλαδή :

$$-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$$

άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι το 1

Δ3. Έστω $A\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ σημείο της C_g, η εξίσωση εφαπτομένης της είναι : $y-g\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν

$$0-g\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)\left(0-x_0\right) \Leftrightarrow g\left(x_0\right)=x_0 g'\left(x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow g\left(x_0\right)=x_0\left(\ln x_0+1\right)\cdot g\left(x_0\right) \overset{g\left(x_0\right)\neq 0}{\Leftrightarrow} 1=x_0\left(\ln x_0+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=\ln x_0+1 \Leftrightarrow f'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow x_0=1$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_g η ποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ4.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} h\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$,θέτουμε $u=x\ln x$ άρα

$$u_0=\lim_{x\to 0^+} u=\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} h\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=\lim\limits_{u\to 0^+} e^u=1$ και επειδή $h\left(1\right)=1$ η συνάρτηση h είναι συνεχής στο 0 , επίσης είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ ως σύνθεση συνεχώς συναρτήσεων άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της .

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h\left(x\right)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g\left(t\right)dt\right)+\left(1-x\right)\int_0^1 h\left(1-t\right)dt$

Η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως πολυωνυμική και επιπλέον έχουμε :

$h\left(0\right)=\int_0^1 h\left(1-t\right)dt$ κάνοντας την αντικατάσταση $u=1-t$ προκύπτει

$h\left(0\right)=\int_0^1 h\left(u\right)du>0$ διότι $h\left(x\right)>0$ για κάθε $x\geq 0$

Επομένω $g\left(x\right)\geq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ άρα

$$\int_1^2 g\left(x\right)dx>\int_1^2 xdx \Leftrightarrow \int_1^2 g\left(x\right)dx>\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g\left(x\right)dx>3$$

$h(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt > 0$ διότι :

Η g είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της

$g''(x) = \frac{1}{x}g(x) + (1+\ln x)^2 g(x) > 0$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση τοι σημείο επαφής.

Επομένω η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0,1]$ άρα η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$